Polynômes orthogonaux

Geoffrey Deperle

Table des matières

Introduction

Nous présenterons ici les familles de polynômes formant une base orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour un produit scalaire de la forme $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\omega : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et continue, appelée le "poids" et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On trouvera pour
- $I = [-1, 1]$, $\omega : t \mapsto 1$ les polynômes de Legendre
- $I =]-1, 1[$, $\omega : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ les polynômes de Tchebychev
- $I = \mathbb{R}^+$, $\omega : t \mapsto e^{-t}$ les polynômes de Laguerre
- $I = \mathbb{R}$, $\omega : t \mapsto e^{-t^2}$ les polynômes d'Hermite

1 Généralités

1.1 Existence, unicité et description des polynômes orthogonaux

Proposition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\omega : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Il existe une unique suite de polynôme (P_n) orthonormale, à coefficient dominant strictement positif et tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$*

Preuve :
Existence :
On considère la suite (P_n) obtenue par procédé d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Montrons que (P_n) convient par récurrence.
Pour $n = 0$, $P_0 = \frac{1}{||1||}$ donc P_0 est à coefficient dominant strictement positif et $\deg(P_0) = 0$
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n convient. Montrons que P_{n+1} convient.
P_{n+1} est de la forme $\frac{X^{n+1}+\lambda_n Pn+\ldots\lambda_0 P_0}{||X^{n+1}+\lambda_n Pn+\ldots\lambda_0 P_0||}$. D'où le coefficient dominant de P_{n+1} est strictement positif et $\deg(P_{n+1}) = n + 1$.
Comme (P_n) est orthonormée, (P_n) convient.

Unicité :
On suppose que (P_n) vérifie

$$P_n = \begin{cases} \deg(P_n) = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{coefficient dominant} > 0 \\ (P_n) \text{ orthonormé} \end{cases}$$

On a alors (pour $n = 0$), $\exists c > 0/P_0 = c$ et $||P_0|| = 1$ d'où $||c|| = 1$.
Or $||c|| = |c| \times \underbrace{||1||}_{\neq 0}$ donc $c = \frac{1}{||1||}$. P_0 est donc unique $(= \frac{1}{||1||})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k < n$, P_k est unique.
On a $P_{n+1} \perp P_0, \ldots, P_{n+1} \perp P_n$ donc $P_{n+1} \perp Vect(P_0, \ldots, P_n)$.
$(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n + 1$ car échelonné en degré donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui est une droite vectorielle.
Soit $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ non nul,
Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = cQ_n$.
En passant à la norme, $1 = |c|||Q_n||$ donc $c = \pm\frac{1}{||Q_n||}$.
Il y a donc un unique choix de c donnant $||P_n||$ positif. Il y a donc unicité de P_n. □

Dans toute la suite, (P_n) désignera une famille de polynôme orthogonal pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Proposition 2. *Une telle famille de polynôme est une famille de polynôme scindé à racines simples et les racines appartiennent à I.*

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Supposons par l'absurde que P_n n'est pas scindé à racine simple sur I.
Notons $x_1, \ldots, x_r$ les racines de multiplicités impaires dans I et $m_1, \ldots m_r$ leurs multiplicités respectives et notons $x'_1, \ldots, x'_{r'}$ les racines de multiplicités paires dans I et $m'_1, \ldots m'_r$ leurs

multiplicités respectives.
On a la décomposition :

$$P_n(t) = R(t) \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{r'} (X - x'_i)^{m'_i}$$

Posons :

$$Q = \begin{cases} (X - x_1) \dots (X - x_r) & \text{si } r \geq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\langle P_n, Q \rangle = \int_I P_n(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Or,

$$\begin{aligned} \int_I P_n(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t &= \int_I R(t)Q(t)\omega(t) \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{r'} (X - x'_i)^{m'_i}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \underbrace{R(t)}_{\text{de signe constant}} \underbrace{\omega(t) \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i+1} \prod_{i=1}^{r'} (X - x'_i)^{m'_i}}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto P_n(t)Q(t)\omega(t)$ est donc continue, de signe constant et d'intégrale nulle donc est nulle sur I par théorème.
Comme ω ne s'annule pas, on a $\forall t \in I, P_n(t)Q(t) = 0$, donc par intégrité $P_n = 0$ ou $Q = 0$. Absurde. □

Le fait qu'une famille de polynômes orthogonaux est scindé à racines simples est souvent plus facile à montrer directement plutôt que d'utiliser cette preuve qui est générale mais fastidieuse.

1.2 Méthode de Gauss

Une utilisation des polynômes orthogonaux peut être en analyse numérique pour calculer efficacement une intégrale d'une fonction polynômiale "pondérée par ω" sur un intervalle avec la méthode de Gauss. Il suffit pour calculer l'intégrale d'une fonction polynômiale de degré $2n-1$, de connaître la fonction en n points qui sont les racines d'un polynôme faisant parti de la famille orthogonale liée au bon produit scalaire.

Proposition 3 (Méthode de Gauss)**.** *Soit* (P_n) *la famille de polynôme orthogonaux liée au produit scalaire* $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$*, et* $x_1, \dots, x_n$ *les racines de* P_n*.*
Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tel que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_I P(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k)$$

Preuve : Il existe deux preuves de ce résultat : une élémentaire et une autre qui utilise de la dualité. Commençons par la méthode élémentaire.

Méthode 1 :
Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

On effectue la division euclidenne de P par P_n : Il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ tel que $P = QP_n + R$. On a alors

$$\int_I P(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_I Q(t)P_n(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \int_I R(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_I R(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

Décomposons ensuite R dans la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associé aux réels $x_1,\dots,x_n$ qui sont distincts. On a $R = \sum_{k=1}^n R(x_k)L_k$ (avec $L_k = \prod_{j=1,j\neq k} \frac{X-x_j}{x_k-x_j}$), comme $P(x_k) = R(x_k)$, on a $R = \sum_{k=1}^n P(x_k)L_k$
On a alors

$$\int_I P(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_I R(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \omega(t)\sum_{k=1}^n P(x_k)L_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n P(x_k)\int_I \omega(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$$

En posant $\lambda_k = \int_I \omega(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$ (qui ne dépend pas de P), on obtient le résultat.

Méthode 2 :
Cette méthode s'appuie sur le lemme suivant

Lemme 4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $g_1,\dots g_n$ des formes linéaires sur E. Alors* $\varphi \in \mathrm{Vect}(g_1,\dots g_n) \iff \bigcap_{i=1}^n \ker(g_i) \subset \ker(\varphi)$

Preuve : Le sens direct est immédiat. Focalisons nous sur le sens réciproque.
Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\bigcap_{i=1}^n \ker(g_i) \subset \ker(\varphi)$. Si $(g_1,\dots,g_n)$ est libre (quitte à extraire des vecteurs), complétons les $(g_1,\dots,g_n)$ en un en base $(g_1,\dots,g_n,\dots g_k)$ de E^*. Considérons la base antéduale de $(g_1,\dots,g_k)$ que l'on note $(e_1,\dots,e_k)$ qui est alors une base de E.
φ coïncide sur $(e_1,\dots,e_n)$ avec l'application $\frac{\varphi(e_1)}{g_1(e_1)}g_1 + \dots \frac{\varphi(e_n)}{g_1(e_n)}g_n$. Pour montrer l'égalité entre les deux applications, il suffit de montrer que φ est nulle sur $\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_k)$ ce qui revient à montrer que $\varphi(e_{n+1}) = \cdots = \varphi(e_k) = 0$. Or, $\forall i > n+1, j \leq n, g_j(e_i) = 0$ donc $\forall i > n+1, e_i \in \bigcap_{j=1}^n \ker(g_j)$ donc $e_i \in \ker(\varphi)$ par hypothèse. D'où le résultat. □

Revenons à la proposition. La fonction $\varphi : P \mapsto \int_I P$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ de dimension finie. En notant $g_1,\dots,g_n$ les applications $P \mapsto P(x_1),\dots,P \mapsto P(x_n)$. La proposition revient à montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_n)$. D'après le lemme, cela revient à montrer que $\bigcap_{i=1}^n \ker(g_i) \subset \ker(\varphi)$.
Soit $P \in \bigcap_{i=1}^n \ker(g_i)$, alors $P(x_1) = \dots P(x_n) = 0$, donc $P_n | P$. Il existe alors Q tel que $P = P_nQ$ et donc $\int_I P = \int_I P_nQ = 0$ car $\deg(Q) < n$. D'où $\varphi(P) = 0$. □

1.3 Relation de récurrence des polynômes orthogonaux et formule de Darboux-Christoffel

Les polynômes orthogonaux vérifient tous une relation du type

$$XP_n = a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1}$$

Pour cela nous pouvons remarquer ceci :

Proposition 5. *Pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, l'endomorphisme $P \mapsto XP$ est symétrique.*

Preuve : Notons $f : P \mapsto XP$,
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle f(P), Q \rangle = \int_I (tP(t))Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_I P(t)(tQ(t))\omega(t)\,\mathrm{d}t = \langle P, f(Q) \rangle$$

□

Passons maintenant à la proposition principale :

Proposition 6. *Soit (P_n) la famille de polynôme orthogonaux lié au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Il existe trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, XP_n = a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1}$*

Preuve : On a $\deg(XP_n) = n + 1$ donc $XP_n \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots P_{n+1})$.
Il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ tel que $XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k$. Comme la base est orthonormé, on a

$$\forall k < n-1, \lambda_k = \langle XP_n, P_k \rangle = \langle P_n, \underbrace{XP_k}_{deg<n} \rangle = 0$$

D'où $XP_n = \lambda_{n+1}P_{n+1} + \lambda_n P_n + \lambda_{n-1}P_{n-1}$.
$a_n = \lambda_{n+1}, b_n = \lambda_n, c_n = \lambda_{n-1}$ convient. □

Ces suites (a_n), (b_n), (c_n) permettent de calculer à x fixé, la série génératrice de la suite de polynômes définies par $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$.
Ces suites apparaissent également dans la formule suivante :

Théorème 7 (Formule de Darboux-Christoffel)**.**
Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(y) = a_n(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x))$$

Preuve : Pour $n = 0$, la formule devient $(x-y)P_0(x)P_0(y) = a_0(P_1(x)P_0(y) - P_1(y)P_0(x))$. Or P_0 est un polynôme constant non nul. Notons $c = P_0$. En simplifiant par c, l'égalité à montrer est équivalente à $(x-y)P_0(x) = a_0(P_1(x) - P_1(y))$. Or P_1 est un polynôme de degré 1. Notons $P_1 = \alpha X + \beta$. Grâce à la formule précédente (qui est vraie pour $n = 1$, $XP_0 = a_0P_1 + b_0P_0$). En identifiant le coefficient devant X on obtient $c = a_0\alpha$.
D'où on a $a_0(P_1(x) - P_1(y)) = a_0\alpha(x-y) = (x-y)P_0(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Posons $\Delta_n = (x-y)\sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(y)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta_n - \Delta_{n-1} &= (x-y)P_n(x)P_n(y)\\ &= xP_n(x)P_n(y) - yP_n(x)P_n(y)\\ &= (a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x))P_n(y) - (a_nP_{n+1}(y) + b_nP_n(y) + c_nP_{n-1}(y))P_n(x)\\ &= a_n(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)) - c_n(P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x))\end{aligned}$$

On a donc un téléscopage dans le cas où $c_n = a_{n-1}$. Et c'est le cas ! Il suffit de vérifier : En utilisant la proposition 5 à n, on a $XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ d'où $\langle XP_n, P_{n-1}\rangle = c_n$. Mais $\langle XP_n, P_{n-1}\rangle = \langle P_n, XP_{n-1}\rangle = a_{n-1}$. D'où $a_{n-1} = c_n$.
Par télescopage, on a $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k - \Delta_{k-1}) + \Delta_0 = a_n(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x))$ $\square$

Passons maintenant aux familles de polynômes orthogonaux pour des produits scalaires particuliers.

2 Polynômes de Legendre

Considérons dans un premier temps le produit scalaire définies sur l'ensemble des fonctions continues de -1 à 1 par

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}[(X^2-1)^n]^{(n)}$.
Les polynômes (L_n) sont appelés les **polynômes de Legendre**.

La formule de Leibnitz permet de trouver une autre expression (souvent plus commode) de L_n. En effet,

$$\begin{aligned} L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}[(X+1)^n(X-1)^n]^{(n)} &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X+1)^n)^{(k)}((X-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n \cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cancel{n!}}{k!}(X+1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^{n-k}(X-1)^k \end{aligned}$$

Par exemple, cette formule permet de trouver le coefficient dominant : chaque terme de la somme est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\binom{n}{k}^2$, donc le coefficient dominant de L_n est $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$ d'après la formule de Vandermonde Montrons que la famille (L_n) est une famille orthogonale pour $\langle .,.\rangle$.

Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tel que $i < j$. Montrons que $\langle L_i, L_j\rangle = 0$

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1} L_i(t)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}[(t^2-1)^j]\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, on a :

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{1}{2^i j!}\left(\left[\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}}[(t^2-1)^j]\times L_i(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L_i'(t)\frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}t^{j+1}}[(t^2-1)^j]\,\mathrm{d}t\right)$$

Or comme 1 et -1 sont des racines de multiplicités j de $(X^2-1)^j$, le crochet est nul. Donc on obtient :

$$\langle L_i, L_j\rangle = -\frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1} L_i'(t)\frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}t^{j+1}}[(t^2-1)^j]\,\mathrm{d}t$$

En ré-itérant des intégrations par parties, on obtient après j itérations :

$$\begin{aligned} \langle L_i, L_j\rangle &= \frac{(-1)^j}{2^j j!}\int_{-1}^{1} \underbrace{L_i^{(j)}(t)}_{=0 \text{ car } \deg L_i = i < j} \times (t^2-1)^j\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

La famille (L_n) est bien orthogonale.
Calculons la norme des polynômes L_n

$$\langle L_i, L_i\rangle = \frac{(-1)^i}{2^i i!}\int_{-1}^{1} L_i^{(i)} \times (t^2-1)^i\,\mathrm{d}t$$

Comme le coefficient dominant de L_i est $\frac{\binom{2i}{i}}{2^i}$ donc on a $L_i^{(i)}(t) = i!\frac{\binom{2i}{i}}{2^i} = \frac{(2i)!}{2^i i!}$. Il suffit alors de calculer $\int_{-1}^1 (t^2-1)^i \,\mathrm{d}t$. Il suffit d'intégrer par parties

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (t^2-1)^i \,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^1 (t-1)^i (t+1)^i \,\mathrm{d}t \\
&= \cancel{\left[(t-1)^i \frac{(t+1)^{i+1}}{i+1}\right]_{-1}^1} - \frac{i}{i+1}\int_{-1}^1 (t-1)^{i-1}(t+1)^{i+1}\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^i \frac{i!}{(i+1)\times\cdots\times(2i)} \int_{-1}^1 (t+1)^{2i}\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^i \frac{i!^2}{(2i)!}\left[\frac{(t+1)^{2i+1}}{2i+1}\right]_{-1}^1 \\
&= (-1)^i \frac{i!^2}{(2i)!}\frac{2^{2i+1}}{2i+1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\langle L_i, L_i\rangle = \frac{(-1)^i}{2^i i!}\frac{(2i)!}{2^i i!}(-1)^i \frac{i!^2}{(2i)!}\frac{2^{2i+1}}{2i+1} = \frac{2}{2i+1}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, ||L_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Comme mentionné précédemment, nous pouvons retrouver (sans utiliser la proposition 2) que les polynômes L_n sont scindés à racines simples :

Proposition 8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est scindé à racines simples*

Preuve : Fixons $n \in \mathbb{N}$,
Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$: "Si $k \leq n, [(X^2-1)^n]^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$"
Montrons que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Pour $k = 0$, On a $k \leq n$ et $[(X^2-1)^n]^{(0)} = [(X^2-1)^n]$ qui n'admet pas de racines dans $]-1,1[$
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Montrons $P(k+1)$.
Si $k+1 > n, P(k+1)$ est vraie
Si $k+1 \leq n$, alors $k \leq n$ donc par hypothèse de récurrence le polynôme $[(X^2-1)^n]^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]-1,1[$. Notons $x_1,\ldots,x_k$ ces racines.
La fonction $[x \mapsto (x^2-1)^n]^{(k)}$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et s'annule en $x_1,\ldots,x_k$ mais aussi en -1 et 1 car 1 et -1 sont des racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicités n et $k \leq n$. Donc d'après le théorème de Rolle, $[x \mapsto (x^2-1)^n]^{(k+1)}$ s'annule sur les intervalles $]-1,x_1[,]x_1,x_2[, \ldots,]x_{k-1},x_k[,]x_k,1[$. Donc $[(X^2-1)^n]^{(k+1)}$ a au moins $k+1$ racines distinctes sur $]-1,1[$. $P(k+1)$ est vraie.

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ est vraie. En particulier pour $k = n$, L_n admet au moins n racines dans $]-1,1[$. Comme $\deg(L_n) = n$, L_n est scindé à racines simples. □

On peut également trouver d'autres propriétés des polynômes de Legendre notamment la parité :

Proposition 9. *L_n est pair pour n paire et impair sinon*

Preuve : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = (-1)^n L_n(-X)$. Pour cela nous allons nous appuyer sur l'unicité de la famille de polynôme orthonormée liée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
Soit $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle (-1)^i L_i(-X), (-1)^j L_j(-X) \rangle &= (-1)^{i+j} \int_{-1}^{1} L_i(-t) L_j(-t) \, \mathrm{d}t \\
&= (-1)^{i+j} \int_{-1}^{1} L_i(t) L_j(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{avec le changement de variable } x = -t \\
&= 0 \qquad \text{par caractère orthogonal de } (L_n)
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $((-1)^n L_n(-X))$ est orthogonale, avec $\forall n \in \mathbb{N}, \deg((-1)^n L_n(-X)) = n$ et est à coefficient dominant strictement positif. De plus,

$$||(-1)^i L_i(-X)||^2 = (-1)^{2i} \int_{-1}^{1} L_i(t) L_i(t) \, \mathrm{d}t = ||L_i(X)||^2$$

Donc la famille $(\frac{(-1)^n L_n(-X)}{||L_n(X)||})$ est orthonormée. Par unicité, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^n L_n(-X)}{||L_n(X)||} = \frac{L_n(X)}{||L_n(X)||}$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n L_n(-X) = L_n(X)$ ce qui est le résultat attendu. $\square$

Cette parité permet notamment de calculer facilement la suite (b_n) liée à L_n. En effet, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$,
En évaluant en $-X$ on obtient

$$\begin{aligned}
-XP_n(-X) &= a_n P_{n+1}(-X) + b_n P_n(-X) + c_n P_{n-1}(-X) \\
(-1)^{n+1} XP_n(X) &= (-1)^{n+1} a_n P_{n+1}(X) + (-1)^n b_n P_n(X) + (-1)^{n-1} c_n P_{n-1}(X) \\
XP_n(X) &= a_n P_{n+1}(X) - b_n P_n(X) + c_n P_{n-1}(X)
\end{aligned}$$

D'où comme cette égalité est valable pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n = 0$

3 Polynômes de Tchebychev

Intéressons nous maintenant à la fameuse suite de polynômes de Tchebychev.

3.1 Définition et propriétés

Les polynômes de Tchebychev proviennent de la remarque suivante :
Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \\
&= \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2) \\
&= 2\cos(a)^2 - 1 \\
\cos(3a) &= \cos(2a)\cos(a) + \sin(2a)\sin(a) \\
&= (2\cos(a)^2 - 1)\cos(a) + 2\cos(a)\sin(a)^2 \\
&= (2\cos(a)^2 - 1)\cos(a) + 2\cos(a)(1 - \cos(a)^2) \\
&= 4\cos(a)^3 - 3\cos(a)
\end{aligned}$$

On conjecture que pour $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, $\cos(na)$ s'exprime en un polynôme en $cos(a)$. Ceci motive la définition suivante :

Proposition 10. *Il existe une unique famille de polynômes T_n tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \cos(nt) = T_n(\cos(t))$*

Preuve :
Unicité :
Supposons qu'il existe deux familles de polynômes (S_n) et (T_n) vérifiant les conditions de la proposition. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $(S_n - T_n)(\cos(t)) = 0$. Donc $S_n - T_n$ s'annule sur l'ensemble $\{\cos(t), t \in \mathbb{R}\}$ qui est infini. Donc $S_n - T_n$ admet une infinité de racines donc $S_n - T_n = 0$ d'où $S_n = T_n$

Existence :
On peut construire les T_n par récurrence, en effet posons $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrons qu'une telle suite de polynômes convient par récurrence double.
T_0 et T_1 conviennent.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que T_n et T_{n+1} conviennent. Montrons que T_{n+2} convient.
Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(t)) &= 2\cos(t)T_{n+1}(\cos(t)) - T_n(\cos(t)) \\
&= 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \cos(n+2)t) + \cos(nt) - \cos(nt) \qquad \text{par par formule de linéarisation} \\
&= \cos((n+2)t)
\end{aligned}$$

Donc T_{n+2} convient.
Par récurrence, la suite (T_n) convient. $\square$

Une autre manière de prouver l'existence est de donner une forme explicite de T_n, notamment en utilisant la formule de De Moivre :

Pour $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, $\cos(nt) = \Re(\cos(nt) + i\sin(nt)) = \Re((\cos(t) + i\sin(t))^n)$

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin(t)^k \cos(t)^{n-k}$$

Comme $i^k \in \mathbb{R} \iff 2|k$, on a

$$\begin{aligned} \cos(nt) &= \sum_{k=0,\, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin(t)^k \cos(t)^{n-k}\breve{a} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin(t)^{2k} \cos(t)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos(t)^2)^k \cos(t)^{n-2k} \end{aligned}$$

On peut alors poser :

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$$

Avec la relation de récurrence que vérifie T_n, on trouve par récurrence immédiate :

Proposition 11. *T_n est un polynôme à coefficients entiers, de degré n, de coefficient dominant égal à 2^{n-1}*

T_n est scindé à racines simples : pour $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. On a $\underbrace{\cos(n\theta_k)}_{=T_n(\cos(\theta_k))} = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$. D'où les $(\cos(\theta_k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont racines de T_n qui est de degré n. Comme les $\cos(\theta_k)$ sont distincts, T_n est scindé à racines simples.
On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}))$$

De plus, pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $t = \cos(\theta)$ donc

$$|T_n(t)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1$$

Donc $\forall t \in [-1,1], |T_n(t)| \leq 1$ avec égalité en $t = \cos(\frac{k\pi}{n})$ avec $k \in [\![0,n]\!]$.
Notons alors $z_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, on a $T_n(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ paire} \\ -1 & \text{si } k \text{ impaire} \end{cases}$
Comme $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ et $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = 1$.
On a les encadrements suivants : $-1 = z_n < x_{n-1} < z_{k-1} < \cdots < z_1 < x_0 < z_0 = 1$ d'où T_n est monotone sur les intervalles $]z_{k+1}, z_k[$

On observe que les polynômes de Tchebychev oscillent dans $[-1,1]$. Le résultat suivant précise ce résultat.

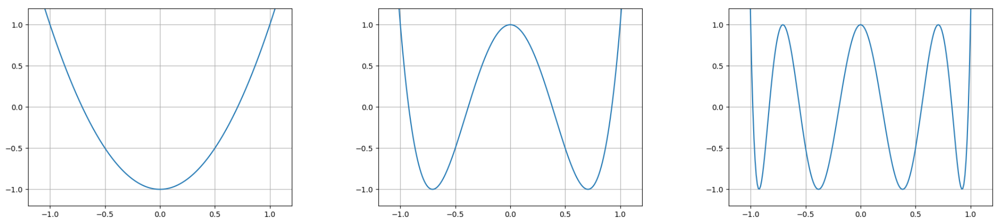

FIGURE 1 – Représentation graphique de T_2, T_4 et T_8

3.2 Théorème de meilleure approximation

Théorème 12 (Théorème de meilleure approximation)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout polynôme P à coefficients réels unitaire de degré n, on a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

avec égalité si et seulement si $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

Preuve :

Inégalité :
Soit P un polynôme unitaire de degré n. Nous noterons $||P|| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$
Montrons que $||P|| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Par l'absurde supposons $||P|| < \frac{1}{2^{n-1}}$, posons $Q = P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.
Q est de degré $n-1$ car P et $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ sont unitaires de degré n et on a

$$\begin{aligned} Q(z_0) &= P(z_0) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(z_0) < 0 \qquad \text{car } ||P|| < \frac{1}{2^{n-1}} \\ Q(z_1) &= P(z_1) + \frac{1}{2^{n-1}}T_n(z_1) > 0 \\ &\vdots \\ Q(z_n) &< 0 \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (comme Q est continue), Q s'annule sur chaque segment $]z_{k+1}, z_k[$ donc au minimum n fois.
D'où $Q = 0$ car $\deg(Q) = n-1$. Absurde. D'où $||P|| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

Cas d'égalité :
Supposons que P vérifie $||P|| = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Reposons $Q = P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$. Montrons que Q est nulle.
On a comme précédemment $Q(z_0) \geq 0, Q(z_1) \leq 0, \ldots$
Si toutes les inégalités sont strictes, on peut conclure comme dans le cas d'inégalité.
Posons pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, P_k : "Si $Q(z_k) \neq 0$, alors Q possède au minimum k racines comptées avec leurs multiplicités sur $[z_k, z_0](= [z_k, 1])$ et si $Q(z_k) = 0$, Q possède $k+1$ racines comptées avec leurs multiplicités sur $[z_k, z_0]$"
P_0 est vrai.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que P_{k-1} est vraie. Montrons P_k.
$\rightarrow$ Si $Q(z_k) = 0$

$P(z_k) - \frac{1}{2^{n-1}} \underbrace{T_n(z_k)}_{=\pm 1} = 0$ d'où $P(z_k) = \pm\frac{1}{2^{n-1}}$ donc z_k est un extremum locale de P qui est dérivable sur un ouvert contenant z_k donc $P'(z_k) = 0$. Comme $T_n'(z_k) = 0$, on a $Q'(z_k) = 0$. z_k est donc racine de multiplicité au moins double de Q. Par hypothèse de récurrence, Q possède au moins $k-1$ racines dans $[z_{k-1}, z_0]$ donc possède $k+1$ au moins racines dans $[z_k, 1]$.ă

$\rightarrow$ Si $Q(z_k) \neq 0$ et $Q(z_{k-1}) = 0$.
Par hypothèse de récurrence Q possède k racines sur $[z_{k-1}, z_0]$ donc Q possède k racines sur $[z_k, 1]$.ă

$\rightarrow$ Si $Q(z_k) \neq 0$ et $Q(z_{k-1}) \neq 0$.
On a $Q(z_k)Q(z_{k-1}) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q s'annule sur $]z_k, z_{k-1}[$ donc Q s'annule au moins k fois sur $[z_k, z_0]$

Ainsi, par récurrence P_n est vraie donc si $Q(z_{n-1}) = 0$ alors Q possède au moins n racines dans $[-1, 1]$ et si $Q(z_n) \neq 0$ alors $Q(z_0)Q(z_{n-1}) < 0$ donc de même Q s'annule sur $]-1, z_{n-1}[$ donc comme on a au moins $n-1$ racines sur $]z_{n-1}, z_0[$, Q s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$. Comme $\deg Q = n-1$. Q est le polynôme nul. □

Remarque 13. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème plus général : On dit qu'une fonction f équi-oscille sur $n+1$ points d'un intervalle $[a, b]$ s'il existe $z_0, \dots, z_n \in [a, b]$ tels que $\forall i \in [\![0, n]\!], |f(z_i)| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ et pour $i < n, f(z_{i+1}) = -f(z_i)$. Les polynômes de Tchebychef T_n equi-oscille donc sur $n+1$ points de $[-1, 1]$. On peut démontrer que pour une fonction f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles, il existe un unique polynôme (de meilleure approximation) qui réalise le minimum de distance de f à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ au sens de la norme uniforme et ce polynôme P_n est caractérisé par le fait que $f - P_n$ équi-oscille sur au moins $n+1$ points de $[a, b]$.
Ici on a que pour $[a, b] = [-1, 1]$, le polynôme $\frac{T_n}{2^{n-1}} - X^n$ réalise le minimum de la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Application du théorème de meilleure approximation

Une des application du théorème de meilleure approximation est de minorer l'erreur commise lors de l'interpolation de Lagrange.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts. Notons L_f le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \dots, x_n$. On peut estimer l'erreur $f - L_f$:
Fixons xă $\in \mathbb{R}, x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, posons $P(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ et étudions la fonction $g : t \mapsto f(t) - L_f(t) - MP(t)$ avec M une constante (qui dépend de x) tel que $g(x) = 0$.
g s'annule en $x_0, \dots, x_n, x$ donc en au moins $n+2$ points. D'après le théorème de Rolle, g' s'annule au moins $n+1$ points distincts, en ré-appliquant le théorème de Rolle g'' s'annule au moins n points distincts. En itérant ainsi $n+1$ fois le théorème de Rolle, on obtient que $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point c_x.
Or, $g^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - M(n+1)!$ d'où $M = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. On obtient donc

$$\forall x \in [a, b], \exists c_x \in [a, b] / f(x) - L_f(x) = P(x)\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

(La formule est vraie pour $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ et est triviale pour $x = x_0, \dots, x = x_n$)

Remarque 14. Ce schéma de preuve (méthode la fonction auxiliaire) consistant à introduire une fonction avec une constante telle qu'on ait une annulation en un x fixé pour ensuite appliquer le théorème de Rolle est un schéma de preuve classique et est utilisée pour démontrer l'égalité des accroissements finis par exemple. Ce type de preuve est aussi utilisé pour donner une forme explicite de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite.

On a alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - L_f(x)| &\leq |P(x)||\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} |P(x)| \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \\
\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - L_f(x)| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} |P(x)| \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas $[a, b] = [-1, 1]$, pour minimiser l'erreur entre f et L_f il faut choisir P tel que $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ soit minimale. Or comme P est un polynôme unitaire de degré $n + 1$, le théorème d'approximation montre que cette quantité est toujours supérieure à $\frac{1}{2^{n-1}}$ et il faut avoir $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ pour que cette valeur soit minimale.

3.3 Orthogonalité

Dans toute la suite, on considère le produit scalaire définie sur les fonctions polynômiales définie par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

Montrons que (T_n) est une famille orthogonale pour $\langle ., .\rangle$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $\langle T_n(t), T_m(t)\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta^2}} \sin\theta d\theta \qquad \text{par changement de variable bijectif } \mathcal{C}^1 : \ t = \cos\theta \\
&= \int_0^{\pi} T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta) \underbrace{\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}}_{=1 \text{ car } \theta\in[0,\pi]} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta
\end{aligned}$$

Si $n \neq m$,

$$\langle T_n(t), T_m(t)\rangle = \left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0$$

Donc la famille (T_n) est orthonormée pour $\langle ., .\rangle$.

3.4 Polynôme de Tchebychev de second espèce

De même que l'on a définit le polynôme T_n comme l'unique polynôme vérifiant pour tout $\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. On peut se demander si il existe une unique famille de polynôme P_n telle que $\forall\theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$.

Or, en regardant $\sin(2\theta)$, on obtient $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$. On voit qu'il n'existe pas de tel polynôme. Cependant, à un facteur $\sin(\theta)$ près, on peut trouver une famille (unique) de polynôme (U_n) telle que $\forall\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta)U_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Ces polynômes sont appelés les polynômes de Tchebychev de second espèce.

Il existe une relation entre les polynômes de Tchebychev de première espèce et les polynômes de Tchebychev de second espèce, en effet, en dérivant la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient $\sin\theta T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$ d'où $\sin\theta(\frac{1}{n}T_n')(\cos\theta) = \sin(n\theta)$ et par unicité de la famille (U_n) on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n}T_n'$
Cette formule permet de déduire des propriétés des polynômes de Tchebychev de première espèce, des propriétés des polynômes de second espèce (degré, coefficient dominant etc...).

4 Polynômes de Laguerre

Intéressons nous au produit scalaire définis sur les fonctions f dont la fonction $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}$ dont nous justifierons la définition :

Proposition 15. *L'ensemble* $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) / t \mapsto f(t)^2 e^{-t}$ *est intégrable* $\}$ *muni du produit scalaire* $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *définie un espace préhilbertien réel contenant l'espace des polynômes.*

Preuve : Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$.
La fonction nulle appartient bien évidemment à $\mathcal{E}$.
Pour $f, g \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{R}$, on peut déjà remarquer grâce l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$$

, donc par comparaison, la fonction $fg \in \mathcal{E}$.
Ainsi comme $(f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t} = f(t)^2 e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t} + g(t)^2 e^{-t}$, $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t}$ est intégrale en tant que somme de fonctions intégrables. Donc $f + \lambda g \in \mathcal{E}$.
Pour $f, g \in \mathcal{E}$, L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc bien définie et on vérifie aisément que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et $P(t)^2 e^{-t} = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t^2})$ donc par comparaison, $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$. □

Définissons alors la famille de polynômes de Laguerre par :

$$L_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$$

Proposition 16. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}, L_n$ *est polynômiale de degré* n *et de coefficient dominant* $\frac{1}{n!}$.

Preuve : Posons $h_n : x \mapsto x^n e^{-x}$, $e_n : x \mapsto x^n$
Pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibnitz, on a

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_n^{(k)}(x)(-1)^{n-k} e^{-x}$$

D'où $h_n^{(n)}(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!(-1)^{n-k} x^{n-k}$. D'où :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{(-1)^n}{\cancel{n!}} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!^{\cancel{2}}}{k!^{\cancel{2}}(n-k)!^2} \cancel{k!}(-1)^{n-k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-k)!} (-1)^k x^{n-k} \end{aligned}$$

L_n définit bien une fonction polynômiale de degré n de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$ □

Pour montrer que la famille (L_n) est une famille de polynômes orthogonaux. Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 17. *Pour toute fonction g polynômiale, $n \in \mathbb{N}$, $\langle g, L_n \rangle = \frac{1}{n!}\langle g^{(n)}, e_n \rangle$*

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle g, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t} e^t h_n^{(n)}(t) g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{qui existe d'après la proposition 10}$$

$$(-1)^n n! \langle g, L_n \rangle = \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t) g(t)\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions g et $h_n^{(n-1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $gh_n^{(n-1)} \to_{+\infty} 0$. Par théorème d'intégration par parties généralisées :

$$(-1)^n n! \langle g, L_n \rangle = \underbrace{\cancel{\left[g(t) h_n^{(n-1)}(t)\right]_0^{+\infty}}}_{\text{car } \forall k<n,\text{ă } h_n^{(k)}(0)=0} - \int_0^{+\infty} h_n^{(n-1)}(t) g'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où en itérant,

$$\begin{aligned}
(-1)^n n! \langle g, L_n \rangle &= (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n(t) g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^n \langle g^{(n)}, e_n \rangle
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

On peut ainsi montrer que la famille est orthogonale :

Proposition 18. $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forme une famille orthonormée pour* $\langle ., . \rangle$

Preuve : Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$, supposons $m < n$.

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{1}{n!} \langle L_m^{(n)}, e_n \rangle = 0 \text{ car } \deg L_m = m < n$$

Et de plus,

$$\begin{aligned}
\langle L_n, L_n \rangle &= \frac{1}{n!} \langle L_n^{(n)}, e_n \rangle \\
&= \frac{1}{n!} \langle 1, e_n \rangle \\
&= \frac{1}{n!} \langle 1, e_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n\,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{en reconnaissant la fonction Gamma}
\end{aligned}$$

$\square$

On a montré précédemment, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n, b_n, c_n tel que $XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}$. Explicitons ces suites :

$$\begin{aligned}
a_n = \langle XL_n, L_{n+1}\rangle &= \frac{1}{(n+1)!}\langle (t \mapsto tL_n(t))^{(n+1)}, e_{n+1}\rangle \\
&= \frac{1}{\cancel{(n+1)!}}\langle \underbrace{\frac{\cancel{(n+1)!}}{n!}}_{(n+1)!\times \text{ coeff. dominant de} XL_n}, e_{n+1}\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n+1}\,\mathrm{d}t = n+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = \langle XL_n, L_n\rangle &= \langle L_n, XL_n\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\langle (t \mapsto tL_n(t))^{(n)}, e_n\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\langle t \mapsto (n+1)t - n^2, e_n\rangle \\
&= \frac{(n+1)}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n+1}\,\mathrm{d}t - \frac{n^2}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)^2 - n^2 = 2n+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n = \langle XL_n, L_{n-1}\rangle &= \langle L_n, XL_{n-1}\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\langle (t \mapsto tL_{n-1}(t))^{(n)}, e_n\rangle \\
&= \frac{1}{n!}\langle \frac{n!}{(n-1)!}, e_n\rangle = \frac{n!}{(n-1)!} = n
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, xL_n(x) = (n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$
En appliquant en $n-1$, on a :

$$\forall n \geq 2, L_n(x) = \frac{x-2n-1}{n}L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}L_{n-2}(x)$$

5 Polynômes d'Hermite

Considérons de même l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $t \mapsto f(t)^2 e^{-t^2}$ est intégrable . $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel contenant l'espace des polynômes, et de même, pour $f, g \in \mathcal{E}, t \mapsto f(t)g(t)e^{-t^2}$ est intégrable. On peut donc définir le produit scalaire sur $\mathcal{E}$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Définissons la famille de polynômes d'Hermite :

$$H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$$

Proposition 19. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynômiale de degré n, de coefficient dominant 2^n*

Preuve : Montrons que H_n est une fonction polynômiale de degré n, de coefficient dominant 2^n par récurrence.
On a $H_0 = 1$. Soit nă $\in \mathbb{N}$ tel que H_n est une fonction polynômiale de degré n, de coefficient dominant 2^n.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(e^{-x^2}) \\
&= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})\right) \\
&= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((-1)^n e^{-x^2} H_n(x)) \\
&= -e^{x^2}(-2xe^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H_n'(x)) \\
\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - H_n'(x)\ (*)
\end{aligned}$$

Ainsi, si H_n est polynômiale de degré n de coefficient dominant 2^n, alors H_{n+1} est polynômiale de degré $n+1$ de coefficient dominant 2^{n+1} (car $\deg H_n' < n$) □

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme (sans surprise) une famille de polynômes orthogonaux pour $\langle ., .\rangle$:

Soit $m < n$. $\langle H_n, H_m\rangle = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Or comme $e^{-t^2} H_n(t) = (-1)^n \frac{d^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t^2})$ donc $t \mapsto e^{-t^2} H_n(t)$ admet pour primitive

$$(-1)^n \frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(e^{-t^2}) = -H_{n-1}e^{-t^2}$$

. Donc en posant $u(t) = H_m(t)$ et $v(t) = -H_{n-1}e^{-t^2}$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} uv(t) = 0$ (par croissance comparée).
D'après le théorème d'intégration par parties généralisée :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(t)H_m'(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En ré-itérant, on a

$$\int_{\mathbb{R}} H_0(t)H_m^{(n)}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ car } \deg H_m = m < n$$

De plus,

$$\begin{aligned}\langle H_n, H_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} H_n(t)H_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} H_0(t)H_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} 2^n n!\,\mathrm{d}t \\ &= 2^n n!\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Comme précédemment, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe a_n, b_n, c_n tel que $XH_n = a_nH_{n+1} + b_nH_n + c_nH_{n-1}$.
On peut calculer les suites a_n, b_n et c_n comme pour les polynômes de Laguerre, en effectuant des produits scalaires et en calculant des intégrales mais une méthode plus directe utilise la relation $(*)$.

En effet, $(*)$ permet de déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n' = 2nH_{n-1}$ $(**)$ par récurrence :
La relation est vérifiée pour $n = 0$ car $H_1 = 2X$ et $H_0 = 1$
Supposons la relation vérifiée pour $n-1$ quelconque, comme on a $H_n = 2XH_{n-1} - H_{n-1}'$, en dérivant :

$$\begin{aligned}H_n' &= 2H_{n-1} + 2XH_{n-1}' - H_{n-1}'' \\ &= 2H_{n-1} + 2X(2(n-1)H_{n-2}) - 2(n-1)H_{n-2}' \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2H_{n-1} + 4(n-1)XH_{n-2} - 2(n-1)H_{n-2}' \\ &= 2(n-1)(2XH_{n-2} - H_{n-2}') + 2H_{n-1} = 2(n-1)H_{n-1} + 2H_{n-1} = 2nH_{n-1}\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Comme $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$ par $(*)$ d'où $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$ par $(**)$ ce qui donne finalement la relation :

$$XH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} - 2nH_{n-1}$$

La relation $(**)$ permet également de montrer que H_n vérifie l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n &= 2nH_{n-1}' - 4nH_{n-1} + 2nH_n \\ &= 2n(2(n-1)H_{n-2}) - 4nXH_{n-1} + 2nH_n \\ &= 2n(H_n - 2XH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}) \\ &= 0\end{aligned}$$